Die Liouville'schen Kurvensysteme und die rhombisch-geodätischen Netze

---

Inaugural-Dissertation

verfaßt und der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

zur Erlangung der Doktorwürde

am 5. Juni 1937 vorgelegt von

Wilhelm Alt

aus Kaiserslautern

1938

C. H. Beck'sche Buchdruckerei Nördlingen

Berichterstatter: Prof. Dr. O. Volk
Prof. Dr. J. Wellstein

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 5

§ 1. Über die Bestimmung sämtlicher rhombisch-geodätischen Netze 5

§ 2. Die Bestimmung sämtlicher Liouville'schen Kurvensysteme auf den Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst. 11

§ 3. Die rhombisch-geodätischen Netze der Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst. 23

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543526_0107

Einleitung.

Besitzt das Quadrat des Bogenelements einer vorgegebenen Fläche die Form

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

so bilden die Parameterkurven $u = \text{konst}$, $v = \text{konst}$ ein rhombisches Netz, wenn $e = g$ ist. Sind die Parameterkurven zugleich geodätische Linien, so liegt ein rhombisch-geodätisches Netz vor.

Läßt sich das Quadrat des Bogenelements einer Fläche auf die Liouville'sche Form

$$ds^2 = (\Phi(\xi) + \Psi(\eta)) \cdot (d\xi^2 + d\eta^2)$$

bringen, so sagt man, die Kurven $\xi = \text{konst}$, $\eta = \text{konst}$ bilden auf der Fläche ein Liouville'sches Kurvensystem oder ein Liouville'sches Kurvennetz. Diejenigen Flächen, auf denen solche Kurvensysteme existieren, nennt man Liouville'sche Flächen.

Für das Folgende ist nun der von **Aurel Voß**[1] stammende Satz von Wichtigkeit:

Jedes rhombisch-geodätische Netz besitzt als Diagonalkurven ein Liouville'sches Kurvensystem.

Rhombisch-geodätische Netze sind also nur auf Liouville'schen Flächen möglich.

§ 1. Über die Bestimmung sämtlicher rhombisch-geodätischen Netze.

Es sollen zunächst sämtliche rhombisch-geodätischen Netze bestimmt werden, welche ein bekanntes Liouville'sches Kurvensystem $\xi = \text{konst}$, $\eta = \text{konst}$ zu Diagonalkurven haben. Ist das

[1] Aurel Voß: Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math. phys. Kl. Bd. 36 (1906), S. 247—296.

Quadrat des Bogenelements der betreffenden Fläche bezüglich $\xi = \text{konst}$, $\eta = \text{konst}$:

$$ds^2 = (\Phi(\xi) + \Psi(\eta)) \cdot (d\xi^2 + d\eta^2), \tag{1}$$

so sind die geodätischen Linien der Fläche gegeben durch:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) + C_1}} \pm \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) - C_1}} = C_2,$$

wobei C_1, C_2 willkürliche Konstante bedeuten. Ihre sämtlichen geodätischen Netze werden somit geliefert durch:

$$\begin{cases} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) + U_1(u)}} + \varepsilon_1 \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) - U_1(u)}} = U_2(u) \\ \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) + V_1(v)}} + \varepsilon_2 \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) - V_1(v)}} = V_2(v), \end{cases} \tag{2}$$

wobei $U_1(u)$, $U_2(u)$ willkürliche Funktionen nur von u und $V_1(v)$, $V_2(v)$ willkürliche Funktionen nur von v bedeuten. Es ist ferner $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Durch (2) sind ξ und η als Funktionen von u, v definiert. Führt man

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi_u\, du + \xi_v\, dv \\ d\eta &= \eta_u\, du + \eta_v\, dv \end{aligned}$$

in (1) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} ds^2 = (\Phi(\xi) + \Psi(\eta)) \cdot [&(\xi_u^2 + \eta_u^2)\, du^2 + 2(\xi_u \xi_v + \eta_u \eta_v)\, du\, dv \\ &+ (\xi_v^2 + \eta_v^2) dv^2]. \end{aligned} \tag{3}$$

Die geodätischen Netze (2) sind somit rhombisch, wenn

$$\xi_u^2 + \eta_u^2 = \xi_v^2 + \eta_v^2. \tag{4}$$

Nun soll die Bedingung dafür aufgestellt werden, daß die geodätischen Netze (2) auch noch die Kurven $\xi = \text{konst}$, $\eta = \text{konst}$ zu Diagonalkurven haben. Ein Kurvensystem $\xi = \text{konst}$, $\eta = \text{konst}$ besitzt ein zweites Kurvensystem $u = \text{konst}$, $v = \text{konst}$

zu Diagonalkurven, wenn zwischen den Parametern ξ, η und u, v die Beziehungen bestehen:

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = \xi\left(\overline{U}(u) + \overline{V}(v)\right) \\ \eta = \eta\left(\overline{U}(u) - \overline{V}(v)\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt durch partielle Differentiation nach u bzw. v:

$$\xi_u = \xi' \cdot \overline{U}' \qquad \eta_u = \eta' \cdot \overline{U}'$$
$$\xi_v = \xi' \cdot \overline{V}' \qquad \eta_v = -\eta' \cdot \overline{V}'.$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die rhombische Bedingung (4) erhält man:

$$(6) \qquad (\xi'^2 + \eta'^2) \cdot (\overline{U}'^2 - \overline{V}'^2) = 0.$$

Es sind nun die beiden Fälle

$$(7) \qquad \xi'^2 + \eta'^2 = 0,$$

$$(8) \qquad \overline{U}'^2 - \overline{V}'^2 = 0$$

zu betrachten.

Aus (7) folgt unter Beachtung von (5):

$$\xi' = \pm i\eta' = a \text{ (konst)}$$

oder integriert:

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi = a\left(\overline{U}(u) + \overline{V}(v)\right) + a_1 \\ \eta = \varepsilon i a \cdot \left(\overline{U}(u) - \overline{V}(v)\right) + a_2 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \end{cases}$$

Differenziert man $(2)_2$ partiell nach u, so gelangt man zu

$$\frac{\xi_u}{\sqrt{\Phi(\xi) + V_1(v)}} + \varepsilon_2 \frac{\eta_u}{\sqrt{\Psi(\eta) - V_1(v)}} = 0.$$

Nach (9) ist wegen $\overline{U}(u) \neq$ konst, $\varepsilon i \xi_u = \eta_u$, d. h. es wird:

$$\frac{\xi_u}{\sqrt{\Phi(\xi) + V_1(v)}} + \varepsilon_2 \frac{\varepsilon i \xi_u}{\sqrt{\Psi(\eta) - V_1(v)}} = 0.$$

Da $\xi_u \neq 0$, so fogt hieraus:

$$\Phi(\xi) + \Psi(\eta) = 0.$$

Für ein reguläres Liouville'sches Kurvensystem ist aber notwendig, daß $\Phi(\xi) + \Psi(\eta)$ nicht identisch verschwindet. Die Bedingung (7) führt zu einem Widerspruch.

Aus (8) folgt:

$$(10) \qquad \begin{cases} \overline{U}(u) = \tau_1 c\, u + c_1 \\ \overline{V}(v) = \tau_2 c\, v + c_2, \end{cases}$$

wobei $\tau_1 = \pm 1, \tau_2 = \pm 1$. Geht man mit (10) in (5) ein, so wird:

$$(11) \qquad \begin{cases} \xi = \bar{\xi}(u + \tau v) \\ \eta = \bar{\eta}(u - \tau v), \end{cases}$$

wobei $\tau = \pm 1$. Am Wesen der Diagonalkurven ändert sich nichts, wenn man in (11) $\tau = +1$ setzt. Unter Änderung der Bezeichnung erhält man somit:

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi = \xi(u + v) \\ \eta = \eta(u - v). \end{cases}$$

Hieraus folgt durch partielle Differentiation

$$(13) \qquad \begin{cases} \xi_u = \xi_v \\ \eta_u = -\eta_v. \end{cases}$$

Dies sind die Bedingungen dafür, daß die geodätischen Netze (2) rhombisch sind und das vorgegebene Liouville'sche Kurvensystem $\xi = \text{konst}$, $\eta = \text{konst}$ zu Diagonalkurven haben. Die Funktionen U_1, U_2, V_1, V_2 in (2) sind also derart zu bestimmen, daß die durch die Gleichungen (2) definierten Funktionen $\xi = \xi(u, v)$, $\eta = \eta(u, v)$ den Gleichungen (13) genügen.

Aus $(2)_2$ und $(2)_1$ folgt durch partielle Differentiation nach u bzw. v:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\xi_u}{\sqrt{\Phi(\xi) + V_1(v)}} + \varepsilon_2 \dfrac{\eta_u}{\sqrt{\Psi(\eta) - V_1(v)}} = 0 \\ \dfrac{\xi_v}{\sqrt{\Phi(\xi) + U_1(u)}} + \varepsilon_1 \dfrac{\eta_v}{\sqrt{\Psi(\eta) - U_1(u)}} = 0. \end{cases}$$

Aus (13) und (14) erhält man nun:

$$\frac{\xi_v}{\sqrt{\Phi(\xi)+V_1(v)}} = \varepsilon_2 \frac{\eta_v}{\sqrt{\Psi(\eta)-V_1(v)}}$$

$$\frac{\xi_v}{\sqrt{\Phi(\xi)+U_1(u)}} = -\varepsilon_1 \frac{\eta_v}{\sqrt{\Psi(\eta)-U_1(u)}}.$$

Hieraus folgt wegen $\xi_v \neq 0$, $\eta_v \neq 0$:

$$\frac{\sqrt{\Phi(\xi)+U_1(u)}}{\sqrt{\Phi(\xi)+V_1(v)}} = \pm \frac{\sqrt{\Psi(\eta)-U_1(u)}}{\sqrt{\Psi(\eta)-V_1(v)}}$$

oder

$$(\Phi(\xi)+\Psi(\eta)) \cdot (U_1(u)-V_1(v)) = 0.$$

Da nun für reguläre Netzpunkte notwendig $\Phi + \Psi \neq 0$ sein muß, so ergibt sich:

$$U_1(u) - V_1(v) = 0$$

oder

$$U_1(u) = V_1(v) = C \text{ (konst)}. \tag{15}$$

Damit gehen die Gleichungen (2) über in:

$$\begin{cases} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)+C}} + \varepsilon_1 \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta)-C}} = U_2(u) \\ \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)+C}} + \varepsilon_2 \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta)-C}} = V_2(v). \end{cases} \tag{16}$$

Durch partielle Differentiation nach u bezw. v erhält man hieraus:

$$\begin{cases} \frac{\xi_u}{\sqrt{\Phi(\xi)+C}} + \varepsilon_1 \frac{\eta_u}{\sqrt{\Psi(\eta)-C}} = U_2'(u) \\ \frac{\xi_u}{\sqrt{\Phi(\xi)+C}} + \varepsilon_2 \frac{\eta_u}{\sqrt{\Psi(\eta)-C}} = 0 \\ \frac{\xi_v}{\sqrt{\Phi(\xi)+C}} + \varepsilon_1 \frac{\eta_v}{\sqrt{\Psi(\eta)-C}} = 0 \\ \frac{\xi_v}{\sqrt{\Phi(\xi)+C}} + \varepsilon_2 \frac{\eta_v}{\sqrt{\Psi(\eta)-C}} = V_2'(v). \end{cases} \tag{17}$$

Die Gleichungen (13) und (17) führen auf:

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \tag{18}$$

und

$$U_2'(u) = V_2'(v) = b(\text{konst})$$

oder integriert:

$$\begin{cases} U_2(u) = bu + b_1 \\ V_2(v) = bv + b_2. \end{cases} \tag{19}$$

Setzt man (18) und (19) in (16) ein, so erhält man die Gesamtheit der rhombisch-geodätischen Netze, welche das Liouville'sche Kurvensystem $\xi = \text{konst}$, $\eta = \text{konst}$ zu Diagonalkurven haben in der Form:

$$\begin{cases} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) + C}} + \varepsilon_1 \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) - C}} = bu + b_1 \\ \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) + C}} - \varepsilon_1 \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) - C}} = bv + b_2. \end{cases} \tag{20}$$

Am Wesen dieser Netze ändert sich nichts, wenn $bu + b_1 = \bar{u}$, $bv + b_2 = \bar{v}$ und $\varepsilon_1 = +1$ gesetzt wird. Unter Änderung der Bezeichnung ergibt sich somit der

Satz 1. Ist das Quadrat des Bogenelements einer Fläche auf die Form $ds^2 = (\Phi(\xi) + \Psi(\eta)) \cdot (d\xi^2 + d\eta^2)$ gebracht, dann sind die rhombisch-geodätischen Netze

$$\begin{cases} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) + C}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) - C}} = u \\ \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) + C}} - \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) - C}} = v \end{cases} \tag{21}$$

die einzigen auf der Fläche, welche das Liouville'sche System $\xi = \text{konst}, \eta = \text{konst}$ zu Diagonalkurven haben.

Nach dem Voß'schen Satz und Satz 1 kennt man also sämtliche rhombisch-geodätischen Netze einer vorgegebenen Fläche, wenn man nur ihre sämtlichen Liouville'schen Systeme kennt. Das Problem der Bestim-

mung sämtlicher rhombisch-geodätischen Netze einer vorgegebenen Fläche ist hiermit zurückgeführt auf das Problem der Bestimmung sämtlicher Liouville'schen Kurvensysteme dieser Fläche.

Koenigs[1] und Raffy[2] haben sämtliche Flächen bestimmt, auf denen mehr als ein Liouville'sches Kurvensystem existieren und sämtliche hierauf vorkommenden Liouville'schen Systeme ermittelt. Die Frage nach den sämtlichen rhombisch-geodätischen Netzen einer vorgegebenen Fläche ist also eindeutig gelöst, wenn für die betreffende Fläche entschieden ist, ob sie überhaupt zu den Liouville'schen Flächen gehört oder nicht. Diese Frage wird aber beantwortet durch die Lösung der von Darboux[3] stammenden Funktionalgleichung:

$$2F_{uu}U(u)+3F_uU'(u)+FU''(u)=2F_{vv}V(v)+3F_vV'(v)+FV''(v),$$

wenn

$$ds^2 = F(u,v)\cdot du\,dv$$

das auf das Minimalkurvensystem bezogene Quadrat des Bogenelements der betreffenden Fläche ist.

§ 2. Die Bestimmung sämtlicher Liouville'schen Kurvensysteme auf den Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst.

Das Problem der Bestimmung sämtlicher rhombisch-geodätischen Netze ist bis jetzt nur für die Flächen konstanter Krümmung gelöst.[4]

---

[1] G. Koenigs: Mémoires sur les lignes géodésiques, Paris Mém. savants étr. 31 (1894) Nr. 6.

[2] L. Raffy: Détermination des éléments doubles harmoniques, J. de Math. (4) 10 (1894).

[3] G. Darboux: Leçons sur la théorie des surfaces, Bd. 2 (1889) S. 209.

[4] O. Volk: I. Geradlinige rhombische Kurvennetze. Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. math. phys. Kl. (1925) S. 35—38. II. Über geodätisch-rhombische Kurvennetze auf krummen Flächen, insbesondere auf Flächen konstanter Krümmung. Sitz. Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. nat. wiss. Kl. (1925).

Auf Grund der Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen lassen sich nun sofort sämtliche rhombisch-geodätischen Netze auf den Rotationsflächen angeben. Die sämtlichen Liouville'schen Systeme auf den Rotationsflächen wurden zum ersten Male von Darboux[1] ermittelt.

In diesem und dem folgenden Paragraphen soll nun das Problem der Bestimmung sämtlicher rhombisch-geodätischen Netze auf den Flächen 2. Or., mit dem Gauß'schen Krümmungsmaß $K \neq$ konst gelöst werden. Dazu genügt es, die Lösung des Problems für das dreiachsige Ellipsoid durchzuführen. Für die übrigen Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst verlaufen die Betrachtungen ganz analog.

Nach dem Satz von Dupin schneiden sich die Flächen des Systems konfokaler Flächen 2. Or.

$$\frac{x^2}{a^2-\nu}+\frac{y^2}{b^2-\nu}+\frac{z^2}{c^2-\nu}=1 \qquad E.\ (\nu<c^2<b^2<a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \qquad H_1.\ (c^2<\lambda<b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1 \qquad H_2.\ (b^2<\mu<a^2)$$

nach Krümmungslinien.

Bezieht man das Quadrat des Bogenelements des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

auf seine Krümmungslinien, so erhält man aus

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \qquad (c^2<\lambda<b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1 \qquad (b^2<\mu<a^2)$$

[1] G. Darboux: Leçons sur la théorie des surfaces, Bd. 3 (1894) S. 35—39. Vergleiche dazu G. Koenigs: Mémoires sur les lignes géodésiques. Paris Mém. savants étr. 31 (1894) Nr. 6, S. 62—68.

die Form:

$$(2)\qquad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{\lambda-\mu}{4}\left(\dfrac{\lambda}{f(\lambda)}\,d\lambda^2 - \dfrac{\mu}{f(\mu)}\,d\mu^2\right) \\ f(\lambda) = (a^2-\lambda)\,(b^2-\lambda)\,(c^2-\lambda) \\ f(\mu) = (a^2-\mu)\,(b^2-\mu)\,(c^2-\mu). \end{cases}$$

Setzt man hierin

$$(3)\qquad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda}{f(\lambda)}}\;d\lambda = d\xi \\ \sqrt{-\dfrac{\mu}{f(\mu)}}\,d\mu = d\eta, \end{cases}$$

so erhält man die Liouville'sche Form:

$$(4)\qquad ds^2 = \big(\Phi(\xi) + \Psi(\eta)\big)\cdot(d\xi^2 + d\eta^2).$$

Hieraus folgt, daß die Krümmungslinien $\lambda = \text{konst}$, $\mu = \text{konst}$ des dreiachsigen Ellipsoids ein Liouville'sches Kurvensystem bilden.

Aus den sehr umfangreichen Arbeiten von Koenigs und Raffy[1] läßt sich folgern, daß die Flächen 2. Or. mit $K \neq \text{konst}$ nicht zu den Flächen gehören, auf denen mehr als ein Liouville'sches Kurvensystem existiert. Die Krümmungslinien bilden also auf den Flächen 2. Or. mit $K \neq \text{konst}$ das einzige Liouville'sche Kurvensystem. Um dies unmittelbar einzusehen, kann man in der folgenden Weise vorgehen.

Setzt man

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \xi + i\eta \\ v = \xi - i\eta \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{u+v}{2} \\ \eta &= \frac{u-v}{2i}, \end{aligned}$$

so geht (4) über in

$$(6)\qquad ds^2 = \big(\Phi_1(u+v) + \Psi_1(u-v)\big)\cdot du\,dv.$$

(6) heißt die Liouville'sche Form für das Quadrat des Bogenelements der Fläche bezüglich der Minimalkurven $u = \text{konst}$,

[1] a. a. O. S. 11, Fußnote 1 und 2.

$v =$ konst. Nach Darboux[1] erhält man aus (6) durch die Substitutionen

$$(7) \qquad \begin{cases} u' = \int \frac{du}{\sqrt{U(u)}} \\ v' = \int \frac{dv}{\sqrt{V(v)}} \end{cases}$$

sämtliche Liouville'schen Formen des dreiachsigen Ellipsoids, wenn man sämtliche Lösungen $U(u) \not\equiv 0$, $V(v) \not\equiv 0$ der Funktionalgleichung

$$(8) \qquad \begin{cases} 2F_{uu}U + 3F_u U' + FU'' = 2F_{vv}V + 3F_v V' + FV'' \\ F = \Phi_1(u+v) + \Psi_1(u-v) \end{cases}$$

kennt.

Zur Lösung dieser Funktionalgleichung schreibe man den Ausdruck F in den Parametern λ, μ.

$$(9) \qquad F = \frac{1}{4}(\lambda - \mu).$$

Unter Beachtung von (3) und (5) wird dann:

$$(10) \qquad \begin{cases} F_u = \frac{1}{8}(w_1 - i w_2) \\ F_v = \frac{1}{8}(w_1 + i w_2) \\ F_{uu} = F_{vv} = \frac{1}{32}\left[\left(\frac{f(\lambda)}{\lambda}\right)' + \left(\frac{f(\mu)}{\mu}\right)'\right], \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$(11) \qquad \begin{cases} w_1 = \sqrt{\frac{f(\lambda)}{\lambda}} \\ w_2 = \sqrt{\frac{f(\mu)}{\mu}} \end{cases}$$

[1] G. Darboux: Leçons sur la théorie des surfaces. Bd. 2 (1889), S. 209.

setzt. Die Funktionalgleichung (8) geht damit über in:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4(\lambda-\mu)}\left[\left(\dfrac{f(\lambda)}{\lambda}\right)'+\left(\dfrac{f(\mu)}{\mu}\right)'\right]\cdot U+\dfrac{3(w_1-iw_2)}{2(\lambda-\mu)}\cdot U'+U''= \\ =\dfrac{1}{4(\lambda-\mu)}\left[\left(\dfrac{f(\lambda)}{\lambda}\right)'+\left(\dfrac{f(\mu)}{\mu}\right)'\right]\cdot V+\dfrac{3(w_1+iw_2)}{2(\lambda-\mu)}\cdot V'+V'', \end{cases}$$

wobei

$$(13)\quad \begin{cases} U=U\left(\int\dfrac{d\lambda}{w_1}+\int\dfrac{d\mu}{w_2}\right) \\ V=V\left(\int\dfrac{d\lambda}{w_1}-\int\dfrac{d\mu}{w_2}\right) \end{cases}$$

ist.

Ehe nun die Lösung der Funktionalgleichung (12) in Angriff genommen werde, soll folgender Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz: Es gibt keine Funktion $f(t) \neq \text{konst}$ der einen Veränderlichen t derart, daß $f\left(\int\frac{d\lambda}{w_1}\pm\int\frac{d\mu}{w_2}\right)$ gleich einer rationalen Funktion in λ, μ, w_1, w_2 ist.

Der Beweis soll indirekt geführt werden. Es sei zunächst die Funktion $f\left(\int\frac{d\lambda}{w_1}+\int\frac{d\mu}{w_2}\right)$ betrachtet.

Angenommen, es gäbe eine Funktion $f(t) \neq \text{konst}$ derart, daß $f\left(\int\frac{d\lambda}{w_1}+\int\frac{d\mu}{w_2}\right)$ gleich einer rationalen Funktion in λ, μ, w_1, w_2 ist, dann müssen für diese Funktion sämtliche Kurven der Kurvenschar

$$(14)\quad f\left(\int\frac{d\lambda}{w_1}+\int\frac{d\mu}{w_2}\right)=C\,(\text{konst})$$

notwendig algebraische Kurven sein, wenn man die Kurven in der λ, μ-Ebene deutet. Macht man die Substitution $\lambda=\frac{1}{\rho}$, $\mu=\frac{1}{\tau}$, so ändert sich an dem algebraischen Charakter der Kurven

(14) nichts. Aus (14) wird dann:

$$f\left(-\int\frac{d\rho}{\rho s_1}-\int\frac{d\tau}{\tau s_2}\right)=C, \tag{15}$$

wobei

$$s_1=\sqrt{(a^2\rho-1)(b^2\rho-1)(c^2\rho-1)}$$
$$s_2=\sqrt{(a^2\tau-1)(b^2\tau-1)(c^2\tau-1)}.$$

Die auftretenden Integrale $J(\rho)=\int\frac{d\rho}{\rho s_1}$ und $J(\tau)=\int\frac{d\tau}{\tau s_2}$ sind elliptische Integrale dritter Gattung.

Das Argument der Funktion f in (15) soll nun mittels des Additionstheorems des elliptischen Integrals dritter Gattung[1] etwas umgeformt werden. Das Additionstheorem lautet:

$$\left\{\begin{aligned} &J(\rho)+J(\tau)=-J(r_1)+2\operatorname{arctg}(r_2)\\ &r_1=\frac{1}{a_1^2}\left(b_1^2+\left(\frac{s_1-s_2}{\rho-\tau}\right)^2\right)-(\rho+\tau)\\ &r_2=\frac{\rho s_2-\tau s_1}{\rho-\tau}\\ &a_1^2=a^2b^2c^2\\ &b_1^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Die Beziehung (15) geht damit über in:

$$f(J(r_1)-2\operatorname{arctg}(r_2))=C. \tag{17}$$

Bedeutet nun F die Umkehrfunktion[2] von f und setzt man $F(C)=C_1$, so folgt aus (17):

$$J(r_1)=C_1+2\operatorname{arctg}(r_2). \tag{18}$$

Setzt man fernerhin $C_1=2\operatorname{arctg}C_2$, dann erhält man:

$$J(r_1)=2\operatorname{arctg}\left(\frac{C_2+r_2}{1-C_2r_2}\right)$$

[1] Vergl. z. B. K. Boehm: Elliptische Funktionen, 2. Teil (1910), S. 146—180.

[2] Von den hier auftretenden Funktionen ist stets vorausgesetzt, daß sie differenzierbar sind. Die Existenz einer Umkehrfunktion ist damit gesichert.

oder

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} J(r_1)\right) = \frac{C_2 + r_2}{1 - C_2 r_2}.$$

Auf der linken Seite der Gleichung (19) steht eine transzendente Funktion von einer rationalen Funktion in ρ, τ, s_1, s_2, welche ungleich konst ist, auf der rechten Seite eine rationale Funktion von ρ, τ, s_1, s_2, C_2, welche ebenfalls ungleich konst ist. Hieraus folgt notwendig die Tatsache: Die Kurven der Schar (19) und damit auch der Schar (14) haben transzendenten Charakter. Die Annahme, es gäbe Funktionen $f(t) \neq$ konst derart, daß $f\left(\int \frac{d\lambda}{w_1} + \int \frac{d\mu}{w_2}\right)$ gleich einer rationalen Funktion in λ, μ, w_1, w_2 ist, führt auf einen Widerspruch. Ganz analog zeigt sich dies für $f\left(\int \frac{d\lambda}{w_1} - \int \frac{d\mu}{w_2}\right)$, womit der Hilfssatz[1] bewiesen ist.

Zur übersichtlicheren Behandlung der Funktionalgleichung (12) sei diese in der Form

$$\text{(20)} \qquad A\,U + B\,U' + U'' = A\,V + C\,V' + V''$$

---

[1] Aus dem Hilfssatz folgt nebenbei, daß für die auftretenden elliptischen Integrale dritter Gattung kein vollständiges algebraisches Additionstheorem von der Form

$$\text{(1)} \qquad J(\rho) + J(\tau) = J(R(\rho, \tau, s_1, s_2))$$

existiert, wie es z. B. bei den elliptischen Integralen erster Gattung auftritt.

Angenommen, es gäbe ein solches Additionstheorem, dann würde aus (1), wenn man unter E die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals dritter Gattung versteht, folgen:

$$E(J(\rho) + J(\tau)) = R(\rho, \tau, s_1, s_2),$$

oder nach Ausführung der Substitution $\rho = \frac{1}{\lambda}$, $\tau = \frac{1}{\mu}$:

$$E\left[-\left(\int \frac{d\lambda}{w_1} + \int \frac{d\mu}{w_2}\right)\right] = \overline{R}(\lambda, \mu, w_1, w_2),$$

was im Widerspruch zu obigem Hilfssatz steht.

Auf analoge Weise wie den Hilfssatz beweist man ganz allgemein den

Satz: Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung besitzen kein vollständiges algebraisches Additionstheorem von der Form

$$J(\rho) + J(\tau) = J(R(\rho, \tau, s_1, s_2)),$$

wo s_1 und s_2 die Irrationalitäten ihrer Integranden bedeuten.

geschrieben. A, B, C sind dabei rationale Funktionen in λ, μ, ω_1, ω_2. Durch partielle Differentiation von (20) nach u, unter Beachtung von (3) und (5), erhält man:

$$A_u U + B_1 U' + C_1 U'' + U''' = A_u V + C_u V'$$

und wegen $C_u \neq 0$:

$$\frac{A_u}{C_u} U + B_1 U' + C_1 U'' + \frac{1}{C_u} U''' = \frac{A_u}{C_u} V + V'. \tag{21}$$

$\frac{A_u}{C_u}$, B_1, C_1 sind dabei wiederum rationale Funktionen in λ, μ, ω_1, ω_2. Durch partielle Differentiation von (21) nach u, unter Beachtung von (3) und (5), erhält man:

$$\left(\frac{A_u}{C_u}\right)_u \cdot U + \bar{B}_2 U' + \bar{C}_2 U'' + \bar{D}_2 U''' + \frac{1}{C_u} U^{(4)} = \left(\frac{A_u}{C_u}\right)_u \cdot V$$

und wegen $\left(\frac{A_u}{C_u}\right)_u \neq 0$[1]:

$$U + B_2 U' + C_2 U'' + D_2 U''' + \frac{1}{C_u \left(\frac{A_u}{C_u}\right)_u} \cdot U^{(4)} = V. \tag{22}$$

Analog ergibt sich:

$$\bar{B}_3 U' + \bar{C}_3 U'' + \bar{D}_3 U''' + \bar{E}_3 U^{(4)} + \frac{1}{C_u \left(\frac{A_u}{C_u}\right)_u} \cdot U^{(5)} = 0, \tag{23}$$

$$B_3 U' + C_3 U'' + D_3 U''' + E_3 U^{(4)} + U^{(5)} = 0. \tag{23}$$

Sind die in (23) auftretenden Größen B_3, C_3, D_3, E_3 sämtlich konstant, dann hat man in (23) eine für die Funktion $U(u)$ homo-

---

[1] Angenommen, es wäre $\left(\frac{A_u}{C_u}\right)_u = 0$, dann würde hieraus

$$\frac{A_u}{C_u} = f(v)$$

folgen, was wegen des Hilfssatzes nur möglich ist, wenn $f(v) = a$ (konst). Ganz analog würde man dann aus $\frac{A_u}{C_u} = a$,

$$A = aC + b \qquad (b = \text{konst})$$

erhalten, was nach Gleichung (12) und (20) nicht der Fall ist.

gene, lineare Differentialgleichung 5. Or. mit konstanten Koeffizienten. Sind einige dieser Größen nicht konstant, dann können sie als rationale Funktionen von λ, μ, ω_1, ω_2 nach dem Hilfssatz niemals Funktionen von u allein sein. Ist z. B. $E_3 \neq$ konst, so erhält man aus (23) durch partielle Differentiation nach v:

$$(24) \qquad (B_3)_v U' + (C_3)_v U'' + (D_3)_v U''' + (E_3)_v U^{(4)} = 0$$

und da $(E_3)_v \neq 0$:

$$(24) \qquad B_4 U' + C_4 U'' + D_4 U''' + U^{(4)} = 0.$$

Man hat somit eine Funktionalgleichung für $U(u)$ erhalten, die nur Ableitungen der Funktion $U(u)$ bis zur 4.Or. enthält. Wäre in (23) $E_3 =$ konst, dann hätte man eine Funktionalgleichung von höchstens 3. Or. in $U(u)$ bekommen; von genau 3. Or., wenn $D_3 \neq$ konst wäre. Sind die in (24) auftretenden Größen B_4, C_4, D_4 sämtlich konstant, dann liegt eine für die Funktion $U(u)$ homogene, lineare Differentialgleichung 4. Or. mit konstanten Koeffizienten vor.

Es läßt sich die Sachlage nun leicht überblicken: Durch sukzessive partielle Differentiation nach v und darauffolgender Division der Gleichung mit dem Faktor der höchsten Ableitung von $U(u)$, gelangt man schließlich zu einer für die Funktion $U(u)$ homogenen, linearen Differentialgleichung n. Or. mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$(25) \qquad U^{(n)} + a_1 U^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-2} U'' + a_{n-1} U' = 0,$$

wobei n, wenn man auch noch Gleichung (23) mit einbezieht, gleich 1, 2, 3, 4, 5 sein kann.

Für $n = 1$ erhält man $U(u) = c$ und weiter nach Gleichung (22) $V(v) = c$. In $U(u) = V(v) = c$ hat man die triviale Lösung der Funktionalgleichung (12) vor sich.

Für $n = 2, 3, 4, 5$ erhält man als Lösung der Differentialgleichung (25):

$$(26) \qquad U(u) = \sum_0^p{}^i \; c_i u^i + \sum_1^q{}^i \sum_0^{q_i}{}^k \; c_{ik} u^k e^{\omega_i u},$$

wobei c_i, c_{ik}, ω_i ($\omega_i \neq 0$) Konstante bedeuten und die Zahl der auf-

tretenden Summanden höchstens gleich 5 ist. Durch Einsetzen von (26) in (22) ergibt sich:

$$(27) \qquad \sum_{0}^{p}{}_i \, R_i \, u^i + \sum_{1}^{q}{}_i \sum_{0}^{q_i}{}_k \, R_{ik} \, u^k \, e^{\omega_i u} = V(v),$$

wobei die R_i, R_{ik} rationale Funktionen in λ, μ, w_1, w_2 sind. Differenziert man (27) partiell nach u, so gelangt man zu:

$$(28) \quad \sum_{0}^{p-1}{}_i \left((R_i)_u + (i+1)\, R_{i+1}\right) u^i + (R_p)_u \, u^p + \\ + \sum_{1}^{q}{}_i \left\{ \sum_{0}^{q_i-1}{}_k \left((R_{ik})_u + \omega_i \, R_{ik} + R_{i,k+1}\right) u^k + \right. \\ \left. + \left((R_{iq_i})_u + \omega_i \, R_{iq_i}\right) u^{q_i} \right\} \cdot e^{\omega_i u} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Koeffizienten von u^i und $u^k \, e^{\omega_i u}$ sämtlich identisch verschwinden müssen. Angenommen, sie würden nicht alle identisch verschwinden, so würde, nach Anwendung der obigen Methode der sukzessiven partiellen Differentiation nach v, sich für die u^i und $u^k \, e^{\omega_i u}$ eine Beziehung von der Form:

$$(29) \qquad \sum_{0}^{p}{}_i \, \bar{c}_i \, u^i + \sum_{1}^{q}{}_i \sum_{0}^{q_i}{}_k \, \bar{c}_{ik} \, u^k \, e^{\omega_i u} = 0^1$$

ergeben, in der $\bar{c}_i$ und $\bar{c}_{ik}$ Konstante bedeuten und in welcher mindestens ein Koeffizient der u^i und $u^k \, e^{\omega_i u}$ von Null verschieden wäre. Das ist aber nicht möglich; denn eine Gleichung von der Form (29) ist dann und nur dann für alle Werte von u erfüllt, wenn sämtliche $\bar{c}_i$, $\bar{c}_{ik}$ verschwinden. Die gemachte Annahme führt auf einen Widerspruch.

Es soll nun untersucht werden, was aus dem Verschwinden der Koeffizienten der Gleichung (28) für die Größen R_i und R_{ik} folgt.

---

[1] Unter der Annahme $(R_0)_u + R_1 \neq 0$ wird man bei der Herleitung von (29) damit beginnen, die Gleichung (28) durch diesen Ausdruck zu dividieren und dann, wenn überhaupt nötig, partiell nach v zu differenzieren.

I. Aus $(R_p)_u = 0$ ergibt sich auf Grund des Hilfssatzes $R_p = f(v) = a_0$(konst). Nun ist weiter:

$$(30) \qquad \begin{cases} (R_i)_u + (i+1)\, R_{i+1} = 0 \\ \quad (i = 0, 1, \ldots, (p-1)). \end{cases}$$

Für $i = p - 1$ erhält man

$$(R_{p-1})_u = -a_0 p$$

oder integriert:

$$(31) \qquad R_{p-1} = -a_0 p u + f(v)$$

1. Ist $f(v) =$ konst, dann ist unter der Voraussetzung $p - 1 \geqq 0$ auf Grund des Hilfssatzes $R_{p-1} = a_1$ (konst) und $R_p = a_0 = 0$.

2. Ist $f(v) \neq$ konst, so folgt aus (31) unter Beachtung des Hilfssatzes:

$$(R_{p-1})_v = f'(v) = a_2 \text{ (konst)}$$

und damit

$$R_{p-1} = a_0 p u + a_2 v + a_3,$$

$$R_{p-1} = a_3 + (a_2 - a_0 p) \int \frac{d\lambda}{w_1} + (a_2 + a_0 p) \int \frac{d\mu}{w_2}.$$

Das ist nur möglich, wenn $a_2 = a_0 p = 0$, was im Widerspruch zu $f(v) \neq$ konst steht.

Für $i = p - 2$ erhält man aus der Gleichung (30) weiterhin $R_{p-1} = a_1 = 0$, $R_{p-2} = a_2$ (konst). Man gelangt so schließlich zu:

$$(32) \qquad R_i = \begin{cases} a \text{ (konst)} & (i = 0) \\ 0 & (i \geqq 1). \end{cases}$$

II. Aus

$$(R_{iq_i})_u + \omega_i R_{iq_i} = 0$$

folgt durch Integration:

$$(33) \qquad R_{iq_i} = g(v)\, e^{-\omega_i u}.$$

1. Ist $g(v) = b$ (konst), dann folgt unter Beachtung des Hilfssatzes, wegen $\omega_i \neq 0$, daß $b = 0$, also $R_{iq_i} = 0$.

2. Ist $g(v) \neq$ konst, dann erhält man aus (33) wegen des Hilfssatzes:

$$\frac{(R_{iq_i})_v}{R_{iq_i}} = \frac{g'(v)}{g(v)} = b_1 \,(\text{konst}),$$
$$g(v) = b_2\, e^{b_1 v}$$

und damit:

$$R_{iq_i} = b_2\, e^{b_1 v} \cdot e^{-\omega_i u},$$

$$R_{iq_i} = b_2\, e^{(b_1 - \omega_i)\int \frac{d\lambda}{w_1} - (b_1 + \omega_i)\int \frac{d\mu}{w_2}}.$$

Das ist wegen $\omega_i \neq 0$ nur dann möglich, wenn $b_2 = 0$, was im Widerspruch zu $g(v) \neq$ konst steht.

Nun ist weiter:

$$(R_{ik})_u + \omega_i R_{ik} + R_{i,\,k+1} = 0 \qquad (34)$$
$$(k = 0,\ 1, \ldots,\ q_i - 1).$$

Für $k = q_i - 1$ erhält man hieraus unter Beachtung von $R_{iq_i} = 0$, analog der obigen Betrachtungen, $R_{i,q_i-1} = 0$. Man gelangt so schließlich zu:

$$\begin{cases} R_{ik} = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, q), (k = 0, 1. \ldots, q_i). \end{cases} \qquad (35)$$

Geht man mit (32) und (35) in (27) ein, so ergibt sich:

$$V(v) = a \,(\text{konst}). \qquad (36)$$

Analog der Gleichung (22) läßt sich aus (20) die Beziehung

$$U(u) = V + \bar{C}\, V' + \bar{D}\, V'' + \bar{E}\, V''' + \frac{1}{B_v \cdot \left(\frac{A_v}{B_v}\right)_v} \cdot V^{(4)} \qquad (37)$$

herleiten. $B_v \cdot \left(\frac{A_v}{B_v}\right)_v$ ist dabei ungleich null. Aus (36) und (37) erhält man dann

$$U(u) = a \,(\text{konst}) \qquad (38)$$

und man gelangt damit zu dem

Ergebnis: Die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung (12) lautet $U(u) = V(v) = a$ (konst).

Es gibt also keine Substitution (7), die aus (6) eine neue Liouville'sche Form schafft, d. h. auf dem dreiachsigen Ellipsoid ist das System der Krümmungslinien das einzige Liouville'sche Kurvensystem.

Ganz das gleiche Ergebnis erhält man für die übrigen Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst. Es sei noch bemerkt, daß für die Rotationsflächen 2. Or. mit $K \neq$ konst die Betrachtungen besonders einfach werden. Man gelangt damit zu dem

Satz 2: Auf den Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst ist das System der Krümmungslinien das einzige Liouville'sche Kurvensystem.

§ 3. Die rhombisch-geodätischen Netze der Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst.

Nach § 1 und § 2 sind die rhombisch-geodätischen Netze

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) - \frac{C}{4}}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) + \frac{C}{4}}} = u \\ \displaystyle\int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) - \frac{C}{4}}} - \int \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) + \frac{C}{4}}} = v \\ d\xi = \sqrt{\frac{\lambda}{f(\lambda)}}\, d\lambda \qquad \Phi(\xi) = \frac{\lambda}{4} \\ d\eta = \sqrt{-\frac{\mu}{f(\mu)}}\, d\mu \qquad \Psi(\eta) = -\frac{\mu}{4} \end{cases}$$

die einzigen, welche auf dem dreiachsigen Ellipsoid existieren. (An Stelle der Konstante C in § 1 S. 10 ist hier $-\frac{C}{4}$ geschrieben.)

Es soll nun an Hand des dreiachsigen Ellipsoids gezeigt werden, wie die Diskussion der rhombisch-geodätischen Netze durchgeführt werden kann.

Sind φ_1, φ_2 die Winkel, welche die Netzkurven $u = \text{konst}$ bzw. $v = \text{konst}$ der rhombisch-geodätischen Netze (1) mit den Kurven $\eta = \text{konst}$ bilden, so ist:

$$(2)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{d\eta}{d\xi} & \text{für } u = \text{konst} \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{d\eta}{d\xi} & \text{für } v = \text{konst.} \end{cases}$$

Aus $(1)_1$ uns $(1)_2$ erhält man durch Differentiation für $u = \text{konst}$ bzw. $v = \text{konst}$:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) - \frac{C}{4}}} + \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) + \frac{C}{4}}} = 0$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi) - \frac{C}{4}}} - \frac{d\eta}{\sqrt{\Psi(\eta) + \frac{C}{4}}} = 0,$$

wodurch (2) übergeht in:

$$(3)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi_1 = -\dfrac{\sqrt{\Psi(\eta) + \frac{C}{4}}}{\sqrt{\Phi(\xi) - \frac{C}{4}}} \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{\sqrt{\Psi(\eta) + \frac{C}{4}}}{\sqrt{\Phi(\xi) - \frac{C}{4}}}. \end{cases}$$

Unter Beachtung von $\Phi(\xi) = \frac{\lambda}{4}$, $\Psi(\lambda) = -\frac{\mu}{4}$ erhält man schließlich:

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi_1 = -\sqrt{-\dfrac{\mu - C}{\lambda - C}} \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \sqrt{-\dfrac{\mu - C}{\lambda - C}}. \end{cases}$$

Für die Diskussion der rhombisch-geodätischen Netze (1) sind nur diejenigen Parameterwerte λ, μ zu betrachten, für welche:

$$\left\{\begin{array}{l} c^2 \leqq \lambda \leqq b^2 \\ b^2 \leqq \mu \leqq a^2; \end{array}\right. \tag{5}$$

denn nur diesen Parameterwerten entsprechen reelle Flächenpunkte.

Faßt man ein ganz bestimmtes Netz, z. B. das Netz C_0 ins Auge, so bedeckt dies nur diejenigen Teile der Fläche, für welche nach (4) die Winkel φ reell sind, d. h. für deren Punkte $P(\lambda, \mu)$:

$$\frac{\mu - C_0}{\lambda - C_0} \leqq 0.$$

Für diejenigen Teile der Fläche, für deren Punkte $P(\lambda, \mu)$:

$$\frac{\mu - C_0}{\lambda - C_0} > 0$$

ist, sind die Winkel φ imaginär. Hier verlaufen also keine Netzkurven.

Für einen komplexen Wert C_0 ist das zugehörige rhombisch-geodätische Netz imaginär. Reelle Netze können also nur für reelle C_0 auftreten.

Überdeckt das zu einem C_0 gehörige rhombisch-geodätische Netz nur einen Teil der Fläche, so werden die beiden Gebiete der Fläche, auf denen Netzkurven verlaufen und auf denen keine verlaufen, nach (4) getrennt durch die Kurven $\mu = C_0$ bzw. $\lambda = C_0$.

Fall 1. Gehört C_0 dem Bereich $c^2 < C < b^2$ an, so folgt aus (4), daß das zugehörige Netz auf dem Teil

$$\left\{\begin{array}{l} c^2 \leqq \lambda \leqq C_0 \\ b^2 \leqq \mu \leqq a^2 \end{array}\right. \tag{6}$$

der Fläche aufliegt. Die Gebiete der Fläche, auf denen Netzkurven verlaufen und auf denen keine verlaufen, werden voneinander getrennt durch die Krümmungslinie $\lambda = C_0$ (konst). Da man nun für $\lambda = C_0$ aus (4) $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ erhält, so folgt, daß die Netzkurven des rhombisch-geodätischen Netzes C_0 die Krüm-

mungslinie $\lambda = C_0$ berühren. $\lambda = C_0$ ist die Enveloppe des rhombisch-geodätischen Netzes C_0.

Fall 2. Gehört C_0 dem Bereich $b^2 < C < a^2$ an, so folgt aus (4), daß das zugehörige Netz auf dem Teil

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 \leqq \lambda \leqq b^2 \\ C_0 \leqq \mu \leqq a^2 \end{array} \right. \tag{7}$$

der Fläche aufliegt. Die Gebiete der Fläche, auf denen Netzkurven verlaufen und auf denen keine verlaufen, werden hiermit getrennt durch die Krümmungslinie $\mu = C_0$ (konst). Da man nun für $\mu = C_0$ aus (4) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ erhält, so folgt, daß die Netzkurven des rhombisch-geodätischen Netzes C_0 die Krümmungslinie $\mu = C_0$ berühren. $\mu = C_0$ ist die Enveloppe des rhombisch-geodätischen Netzes C_0.

Fall 3. Gehört C_0 dem Bereich $C < c^2$, $a^2 < C$ an, so folgt aus (4), daß für diese Werte von C_0 überhaupt keine reellen rhombisch-geodätischen Netze existieren.

Nun noch drei Grenzfälle:

Grenzfall $(1 \to 3)$. Für $C_0 = c^2$ folgt aus (4) und (6), daß sich das zugehörige Netz auf die Hauptschnittkurve

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 \leqq \mu \leqq a^2 \\ \lambda = c^2 \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{array} \tag{8}$$

des dreiachsigen Ellipsoids zusammengezogen hat. Es liegt also ein ausgeartetes Netz vor.

Grenzfall $(2 \to 3)$. Für $C_0 = a^2$ folgt aus (4) und (7), daß sich das zugehörige Netz auf die Hauptschnittkurve

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 \leqq \lambda \leqq b^2 \\ \mu = a^2 \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{array} \tag{9}$$

des dreiachsigen Ellipsoids zusammengezogen hat. Auch hier liegt ein ausgeartetes Netz vor.

Grenzfall $(1 \rightleftarrows 2)$. Für $C_0 = b^2$ folgt aus (4), (6) und (7), daß das zugehörige Netz auf der ganzen Fläche aufliegt. Die Teile

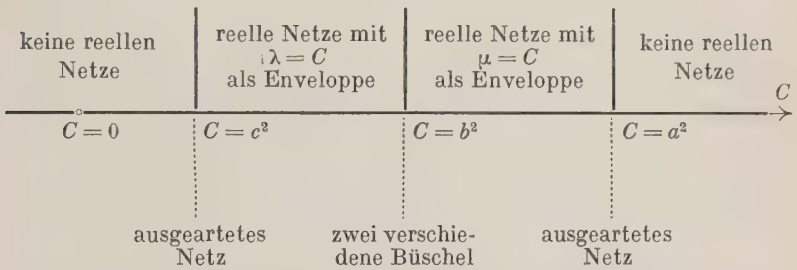
$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 \leqq \lambda \leqq b^2 \\ \mu = b^2 \end{array} \right. \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{r} b^2 \leqq \mu \leqq a^2 \\ \lambda = b^2 \end{array}$$

der Hauptschnittkurve

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0, \end{cases}$$

die durch die vier Nabelpunkte des dreiachsigen Ellipsoids geht, können in diesem Grenzfalle als Enveloppe des rhombisch-geodätischen Netzes $C_0 = b^2$ aufgefaßt werden. Das besagt aber, daß die Netzkurven zwei verschiedene Büschel bilden mit den Nabelpunkten als Träger.

Es wird nun eine schematische Übersicht über die ∞^1 reellen rhombisch-geodätischen Netze des dreiachsigen Ellipsoids gegeben:



Ganz analog verlaufen die Betrachtungen für die übrigen Flächen 2. Or. mit $K \neq$ konst. Das Ergebnis läßt sich zusammenfassen in dem

Satz 3. Auf den Flächen 2. Or. mit positiver Krümmung, die weder Rotationsflächen noch Flächen konstanter Krümmung sind, bilden zwei Scharen von geodätischen Linien ein rhombisches Netz, wenn sie identisch sind und zwei kongruente Krümmungslinien umhüllen (für das elliptische Paraboloid tritt noch der Fall hinzu, wo die Hüllkurve nur aus einer Krümmungslinie besteht) oder zwei verschiedene Büschel bilden mit den Nabelpunkten als Träger.

Auf den Flächen 2. Or. mit negativer Krümmung, die keine Rotationsflächen sind, bilden zwei Scharen von geodätischen Linien ein rhombisches Netz, wenn sie identisch sind und zwei kongruente Krümmungs-

linien umhüllen oder voneinander verschieden sind und die Hauptschnittkurven nach einem bestimmten, leicht anzugebenden Gesetze schneiden.

Auf den Rotationsflächen 2. Or., die nicht zu den Flächen konstanter Krümmung gehören, bilden zwei Scharen von geodätischen Linien ein rhombisches Netz, wenn sie identisch sind und zwei kongruente Parallelkreise umhüllen (E, H_1, H_2), wenn sie identisch sind und einen Parallelkreis umhüllen (P_e) oder voneinander verschieden sind (H_1)und den Kehlkreis unter gleichem Winkel schneiden.

Lebenslauf.

Als Sohn des Lehrers Wilhelm Alt und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Weißmann, bin ich am 27. Aug. 1909 zu Heltersberg in der Pfalz geboren. Während des Krieges besuchte ich die Volksschule meines Geburtsortes, nach dem Kriege die Volksschule in Kaiserslautern. Im Jahre 1921 trat ich in die Oberrealschule zu Kaiserslautern ein, welche ich 1930 absolvierte. Anschließend begann ich mit dem Studium der Mathematik und Physik und hörte Vorlesungen in München und Würzburg und zwar in München bei den Herrn Professoren Bochner, Carathéodory, Dingler, Gerlach, Hartogs, Perron und Tietze, in Würzburg, bei den Herrn Professoren Goetzeler, Harms, Marbe, Ott, Rost, Volk und von Weber. Nach zweimaliger Unterbrechung des Studiums unterzog ich mich im Jahre 1936 dem ersten Abschnitt der Lehramtsprüfung und ein Jahr später, nach Ableistung des Seminarjahres, dem zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung.

Vor allem möchte ich auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. O. Volk, für sein freundliches Entgegenkommen bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Würzburg, den 5. Juni 1937.